875. Pythagorian ring ニ就テ, II

吉田 耕作（阪大）

§1. 前談話 873 ノ補正

$\boxed{\text{公理 iv) ノ廃棄}}$ 深宮政範氏ノ御注意デ H. Freudenthal[1] ヲ見テミマスト公理 iv) ハ他ノ諸公理ヨリ導キ出セルヤウデス。ノミナラズ公理 iii)' ハヨリ弱イ

公理 iii)'' 単調系列 $\{A_n\}$ が上ニ（下ニ）押ヘラレテヰルナラバ $\sup\limits_n A_n$ （$\inf\limits_n A_n$）が存在スル。

カラ導ケルコトモワカリマス。兎ニ角 lattice ノ方デハ常識ラシク結局公理 iv) ハ定理或ヒハ lemma トスベキモノデシタ。

$\boxed{\text{公理群カラノ結果 1) ノ訂正}}$ $A>0$ ノ正ノ二乗根 $A^{\frac{1}{2}}$ ガ

$$A^{\frac{1}{2}} = \sup_C \left(C>0,\ C^2 \leqq A \right)$$

トシタノハ一寸早スギマシタ。之レ右辺が環 R ノ要素トシテ存在スルカドウカ未ダワカラナイノデスカラ。併シコノ性質ヲ何ニツカッタカト云フト

$$0<A<B \text{ ナラ } 0<A^{\frac{1}{2}}<B^{\frac{1}{2}}$$

ヲ導クノニ使ッタダケデスカラ，公理群カラ，$0<A$, $0<B$ ノトキ

---

(1) Proc. Amsterdam (1936) 641—651.

$$A^2 < B^2 \quad ナラ \quad A < B$$

ガ云ヘルトヨイ。之ノ証明ハ次ノ如クシテ得ラレル。即チ仮定カラ $(B-A)(B+A) > 0$. $B-A=(B-A)_+ - (B-A)_-$ ト置クトキ $(B-A)_- = 0$ ナラ問題ハナイカラ $(B-A)_- > 0$ トシテ矛盾出ス。ソレニハ

$(B-A)_-(B-A)(B+A) = -(B-A)^2_-(B+A) \geqq 0$ カラ

$(B-A)^2_- B = 0$, $(B-A)^2_- A = 0$

従ッテ $(B-A)^2_-(B-A) = -(B-A)^3_- = 0$

即チ $(B-A)^3_- = 0$ ヲ得ル。

故ニ $(B-A)^4_- = 0$ トナルカラ<u>公理 i)</u> ヲ用ヒ $(B-A)_- = 0$ ヲ得テ不合理デアル。

$\boxed{\text{公理群カラノ結果 5) ノ補正}}$ $E_0 A = 0$, $E_\infty A = A$ トシタ所少シ註訳ガ必要ダッタ様デス。E_0 ト書イタノハ実ハ E_{+0} トスベキデ

$$E_{+0} = \inf_{\lambda > 0} E_\lambda, \qquad E_\infty = \sup_{\lambda > 0} E_\lambda$$

デアルコト勿論デス。$E_{+0} A = 0$ ハ $E_\lambda A \leqq \lambda E_\lambda$ カラ明カ。又 $E_\infty A = A$ ノミナラズ、実ハ <u>$E_\infty = I$（単位）</u>ガ云ヘルノデス。ソレハ

$$A(I - E_\lambda) \geqq \lambda (I - E_\lambda)$$

ヲ使ヘバヨイ。即チ $\frac{A}{\lambda} \geqq I - E_\lambda$ ヲ使ッテ $A > 0$ ノトキ

$$\inf_{n \geqq 1} \frac{A}{n} = 0$$

ヲ出セレバヨイ。之レハ容易デ $\inf_n \frac{A}{n} = B > 0$ トシ

テ矛盾ヲ出スコトニ帰スル。

<u>ソノ証明</u>。 $A \geqq nB$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ $\sup_{n \geqq 1}(nB) = C$ ガ存在スル。$B>0$ ダカラ $C-B<C$，故ニ充分大キツ n ヲトルト $nB \nleq C-B$. 即チ $(n+1)B \nleq C$ ナル矛盾ヲ得ル。

故ニ $\lambda \leqq 0$ ノトキ $E_\lambda = 0$ トヲツト

> 正ノ元 A ノ *spectral theorem*
>
> $$\begin{cases} A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda = \int_0^{\infty} \lambda\, dE_\lambda, \quad E_\lambda^2 = E_\lambda \\ E_\infty = I, \quad E_{+0} = 0, \quad E_\lambda \geqq E_\mu \ (\lambda \geqq \mu) \end{cases}$$

ガ得ラレテヲッタ訳デシタ。述べ方ガ前談話デハ不充分ノ様デス。

§2. 一般元ノ *spectral theorem*

Aヲ環RノI任意ノ元トスルトキ，正ノ元 $(A+nI)_+$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ *spectral* 表現ヲ考ヘル。

$$(A+nI)_+ = \int_0^{\infty} \lambda\, dE_\lambda(n),$$

$$E_\lambda(n) = I - \left\{ \lim_m \left[\inf_k \frac{(A+nI)_+^k}{\lambda^k} \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}$$

公理群ヨリノ諸結果 5) ニヨリ $\lambda > \mu > 0$ ナラ

$$\begin{aligned} \mu\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right) &\leqq (A+nI)_+\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right) \\ &\leqq \lambda\left(E_\lambda(n) - E_\mu(n)\right) \end{aligned}$$

所ガ容易ニワカル如ク $\left(E_\lambda(n)-E_\mu(n)\right)(A+nI)_-=0$ ダカラ上式眞中ノ項ハ $(A+nI)\left(E_\lambda(n)-E_\mu(n)\right)$ ト書ケル。故ニ

$$(\mu-n)\left(E_\lambda(n)-E_\mu(n)\right)\leqq A\left(E_\lambda(n)-E_\mu(n)\right)$$
$$\leqq(\lambda-n)\left(E_\lambda(n)-E_\mu(n)\right)$$

從ッテ

$$E_{\lambda+n}(n)=E_\lambda^{(n)}$$

トヲクト $\lambda>\mu>-n$ ナラバ

$$\mu\left(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)}\right)\leqq A\left(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)}\right)\leqq\lambda\left(E_\lambda^{(n)}-E_\mu^{(n)}\right)$$

故ニ $\quad \widetilde{E}_\lambda=\sup_{n\geqq 1} E_\lambda^{(n)}$

トヲケバ $\widetilde{E}_\lambda$ ハ $+\infty>\lambda>-\infty$ デ定義サレ且ツ

$$\widetilde{E}_\lambda^2=\widetilde{E}_\lambda,\quad \lambda(I-\widetilde{E}_\lambda)\leqq(I-\widetilde{E}_\lambda)A,$$
$$\widetilde{E}_\lambda A\leqq\lambda\widetilde{E}_\lambda$$

ガ成立スルコトガワカル。之レカラ $\widetilde{E}_\lambda$ ガ A ノ *spectral* 表現ヲ與ヘルコトハ $\boxed{\text{公理群カラノ結果 8)}}$ ト同様ニシテワカル：

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d\widetilde{E}_\lambda.$$

§3. 環 R ノ函數環トシテノ具体的表現

R ノ *idempotent* ナ元 A $(A^2=A)$ ノ全体 $\mathfrak{J}$ ヲ

考ヘル。$\mathfrak{J}$ ハ

(1) 單位 I ト 0 ヲ含ム。

(2) $A, B \in \mathfrak{J}$ ナラバ $A \vee B = A + B - AB$,

$A \wedge B = AB \in \mathfrak{J}$.

(2)' 公理 iii)' ニヨリ lattice トシテノ和 $\vee$, 積 $\wedge$ ニ關シテ $\mathfrak{J}$ ハ可附番個マデノ和, 積ガ許サレテヲル。

(3) 斯クシテ $\mathfrak{J}$ ハ "distributive lattice" デアルガ, 尚 "complemented" デアル。即チ $A \in \mathfrak{J}$ ナラバ $I - A \in \mathfrak{J}$.

(4) $A, B \in \mathfrak{J}$ 且ツ $A \neq B$ ナラバ $A \wedge C = 0$, $B \wedge C \neq 0$ ナル如キ $C \in \mathfrak{J}$ 存在ス ($C = A \wedge (I - B)$ ヲトレ)。

以上ノ性質ヲ使フト Stone-Wallman 流[1] ニ $\mathfrak{J}$ ノ点集合トシテノ表現ガ出來ル。以下ニソレヲ述ベヨウ。

$\boxed{\text{divisorless additive ideal of } \mathfrak{J}}$ $\mathfrak{J}$ ノ部分集合 $\mathfrak{A}$ ガ i) $A, B \in \mathfrak{A}$ ナラ $A \wedge B \in \mathfrak{A}$ ii) $A \in \mathfrak{A}$ ナラ $A < B$ ($A \wedge B = A$ ノコト) ナル如キ B 全テ $\in \mathfrak{A}$ ナルトキ $\mathfrak{A}$ ヲ "additive ideal of $\mathfrak{J}$" ト呼ブ。divisorless ト云フノハ $\mathfrak{A}$ ヲ部分集合トシテ含ム additive ideal ハ $\mathfrak{J}$ 自身ニ限ルコトデアル。

---

(1) Ann. of Math. 39 (1938), 112–126.

$\boxed{\text{Bicompact space } \widetilde{\mathfrak{J}}}$ $\mathfrak{J}$ ノ d.a.i. $\mathfrak{a}$ ヲ"点"トスル空間 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ヲ考ヘル。コノ点ヲ $\tilde{\mathfrak{a}}$ ト記ス。$\mathfrak{a}$ ノ元ヲ $\tilde{\mathfrak{a}}$ ナル点ノ"坐標"ト呼ブ。$\mathfrak{J}$ ノ元 A ニ對シテハ其ノ坐標ノ一ツが A デアル如キ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ点全体 $\tilde{A}$ ヲ對應サセル。$\tilde{A}$ ノ如キ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ点集合及ビ斯ルモノノ積集合ヲ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ"閉集合"ト名ヅケルト $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ Bicompact ナ T_1-space (一点が閉集合ニナルコト) ニナル。
— Wallman — (1), (2), (3) カラ出テクル。

$\boxed{\text{空間 } \widetilde{\mathfrak{J}} \text{ ノ性質 1.}}$ 尚 (4) ヲ使ヘバ $\mathfrak{J}$ ノ点 A ト $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ特別ナ点集合 $\tilde{A}$ トノ對應ハ 1-to-1 ニナル — Wallman

$\boxed{\text{空間 } \widetilde{\mathfrak{J}} \text{ ノ性質 2}}$ 上カラ $\tilde{A}$ ノ如キ点集合が $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ閉集合ノ base ニナッテルワケデアルが, (3) ヲ使ヘバ各 $\tilde{A}$ ハ開集合ニモナッテヰル。即チ吾々ノ場合ハ $\{\tilde{A}\}$ ハ bicompact space $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ closed bace 且ツ open base デアル。

$\boxed{\{\tilde{A}\} \text{ ノ性質 1}}$ (1), (2), (3) ヲ使ヘバ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ノ点集合トシテノ和 $\tilde{A}+\tilde{B}$, 積 $\tilde{A}\,\tilde{B}$ ハ夫々 $(\widetilde{A\vee B})$, $(\widetilde{A\wedge B})$ デアル。即チ上述ト合セテ對應 $A\rightarrow\tilde{A}$ ハ lattice isomorphic デアル — Wallman.

$\boxed{\{\tilde{A}\} \text{ ノ性質 2}}$ $\mathfrak{J}$ ハ complete additive, complete multiplicative デアル。之が $\{\tilde{A}\}$ ニドウ反映スルカ。$A_1 < A_2 < \cdots\cdots$ 且ツ

$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$ トスレバ和集合 $\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i \leqq \widetilde{A}$ ハ明カデアルガ實ハ $\widetilde{A} - \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{A}_i$ ハ non-dense ニナル。

$\boxed{\text{証明}}$ 上述カラ之ノ集合ガ $\widetilde{J}$ ノ開集合ナコトハ明カダカラ之レガ開集合ヲ含マヌコト，特ニ如何ナル $\widehat{B}$ ヲモ含マヌコトヲ云ヘバヨイ。所ガモシ $\widehat{B}$ ヲ含ムトスレバ，上ノ isomorphie カラ $A > B$ 且ツ $B \wedge A_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ トナリ $A = \lim_{i\to\infty} A_i$ ニ反スル。

— 以上 —

故ニ $\{\widetilde{A}\}$ ハ $\widetilde{J}$ ノ "第一類集合" ヲ常ニ無視スルコトニスルト complete additive 且ツ complete multiplicative ニナル。

$\boxed{\text{$\mathfrak{R}$ ノ可測函數環トシテノ表現}}$ ハモハヤ訳ハナイ。$A \in \mathfrak{R}$ ノ spectral 表現 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ カラ $(-\infty, \infty)$ ヲ $\frac{1}{n}$-net ニ分ケテ $\widetilde{J}$ ノ集合 $(\widetilde{E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}})$ デ λ_i ニナル如キ階段函數ノ $n \longrightarrow \infty$ ノトキノ極限トシテ得ラレル函數 $f_A(t)$ on $\widetilde{J}$ ヲ A ニ對應サセルトヨイ。即チ

$\mathfrak{R}$ ノ各要素 A ハ $\widetilde{J}$ ノ上デ第一類ノ集合ヲ除キ到ル所有限且ツ "可測" —— 函數 $f_A(t)$ ガ $f_A(t) \leqq \lambda$ ナル如キ $t \in \widetilde{J}$ ノ集合ガ $\widehat{B}$ ノ如キモノト（高々第一類ノ集合ヲ除キ一致スルコト —— ナ函數 $f_A(t)$ デ表現サ

レル。然モ

$$\begin{cases} A \to f_A(t), \quad B \to f_B(t) \text{ ナラバ} \\ A+B \to f_A(t)+f_B(t), \quad AB \to f_A(t)\, f_B(t), \\ A \geqq B \longleftrightarrow f_A(t) \geqq f_B(t)^{(1)} \end{cases}$$

ナルコトハ容易ニ示サレル。

逆ニ斯ル可測函數 $f(t)$ ヲ任意ニトルト之レガ或ル $A \in \mathcal{R}$ カラ $f_A(t)$ トシテ得ラレルコトヲ云フニハ今一ツ公理ヲ導入シトケバヨロシイ。即チ

$\boxed{\text{公理 iV)}}$ $\mathcal{R}$ ノ可附番個ノ要素 A_i ガ $\inf(A_i, A_j) = 0$ $(i \neq j)$ ヲ滿足スレバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}.$$

上ノ公理ガアレバ $f(t)$ ヲ階段函數デ近似シタモノノ原像ガ $\mathcal{R}$ ニアルコトカラ A ガ $f_A(t) = f(t)$ ナル如ク定ルノデアル。

〔注意〕 von Neumann, M. H. Stone 等ノ代數的取扱ヒデハ有界函數シカ出ラコナイ。上ノ如クヤレバ可測函數ガデテクル。勿論公理ガ少ナイカラ measure ハ入ラナイケレドモ。[2] 確率論ハ可測函數ノ空間ヲ扱フ analysis ナノダカラ上ノ結果カラ確率論ノ algebraic-analytic ナ取扱ヒヲスル望ミガ

---

(1) 第一類ノ集合ヲ除キ。

(2) measure ヲ入レルコトハ metric ナ axiom ヲ入レルコトニヨリタヤスク出來ル。

アル様ニ思ハレル。